Função Quadrática: Estudo do sinal e problemas de máximo e mínimo

Teoria

Gráfico

Antes de entrarmos de fato em problemas de máximos e mínimos e estudo do sinal, devemos relembrar alguns aspectos gráficos de uma função quadrática (do segundo grau). Uma função quadrática é aquela que apresenta a lei de formação como $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, onde o seu gráfico é dado por uma parábola.

O coeficiente a determina a concavidade da parábola:

$a > 0 \rightarrow concavidade\ para\ cima$ $\quad$ $a < 0 \rightarrow concavidade\ para\ baixo$

Interseção com o eixo x

As raízes de uma função quadrática são os valores de x encontrados ao resolver a equação $f(x) = 0$, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$. Para resolver essa equação, utilizamos a fórmula de Bhaskara ou as relações de soma e produto.

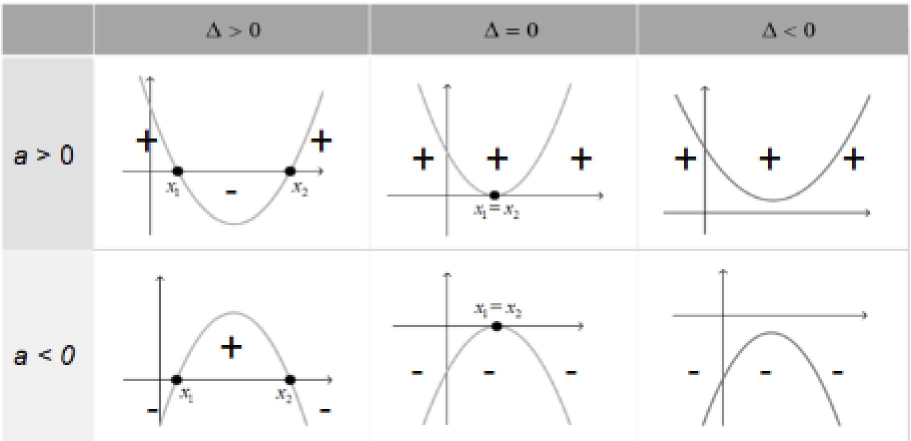
Utilizando a fórmula de Bhaskara: A fórmula de Bhaskara é uma fórmula que nos permite resolver equações completas e incompletas do segundo grau a partir dos coeficientes numéricos da equação. Ela se encontra abaixo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

Discriminante e sinal da função: O discriminante da equação, representado por Δ, nos informa também quantas são as raízes que nos satisfazem:

- Se Δ >0, teremos duas raízes reais distintas.
- Se Δ =0, teremos duas raízes raiz reais idênticas.
- Se Δ <0, teremos nenhuma raiz real.

Uma função tem valores positivos quando ela está acima do eixo x e valores negativos nos momentos em que se encontra abaixo do eixo x. Como vimos anteriormente, uma parábola pode ter concavidade para cima $(a > 0)$ ou para baixo $(a < 0)$. Dessa forma, vejamos os exemplos abaixo. Em cada linha, uma parábola com duas raízes reais $(\Delta > 0)$, duas raízes reais idênticas $(\Delta = 0)$ e nenhuma raiz real $(\Delta < 0)$, respectivamente.



Utilizando as relações de soma e produto das raízes: Esse é um método útil para resolvermos equações do segundo grau mentalmente. Recomenda-se utilizar esse método quando o coeficiente a é igual a 1. Ele se baseia na seguintes relações:

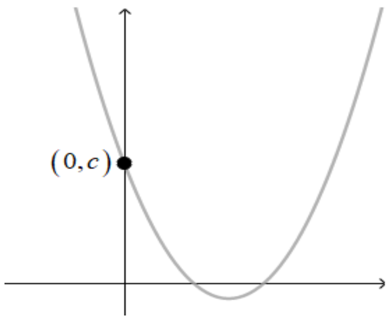
- O produto das raízes de uma equação do segundo grau equivale ao valor da razão $\frac{c}{a}$.
- A soma das raízes de uma equação do segundo grau equivale ao valor da razão $-\frac{b}{a}$.

Interseção com o eixo y

O valor do coeficiente c representa o ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas, ou seja, o eixo 0y. Isso porque, quando calculamos $f(0)$,

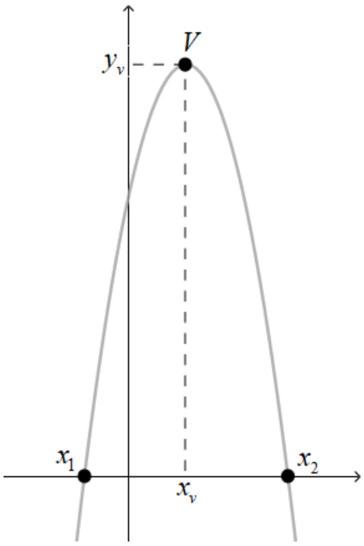
$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow f(0) = c$$

Assim, o coeficiente c é a ordenada do ponto (0, c). No plano cartesiano, temos a seguinte representação:



Vértice da parábola

Toda parábola tem um ponto chamado de vértice, que determina a mudança de crescimento para decrescimento ou vice-versa. Por essa razão, ele determina ainda o eixo de simetria da parábola. Devemos encontrar as coordenadas do vértice da parábola, representadas na imagem seguinte, por $V\ (x_v, y_v)$.



Máximos e mínimos de uma função quadrática: Podemos classificar o vértice a partir da concavidade da parábola.

- Se $a > 0$, o vértice V é chamado de ponto mínimo da função.
- Se $a < 0$, o vértice V é chamado de ponto máximo da função.

Esse conceito de ponto máximo ou mínimo de uma parábola pode ser aplicado em situações cujo objetivo é saber o valor máximo ou mínimo em uma relação. É importante ressaltar que uma parábola não pode ter ponto máximo e mínimo ao mesmo tempo. Se ela possui ponto máximo, então certamente não terá ponto mínimo. Da mesma maneira que, se tiver ponto mínimo, não terá, então, ponto máximo.

Note que, em problemas de máximo e mínimo, o x_v é o valor que temos que ter para atingir o valor máximo ou mínimo. Já o y_v é o valor máximo ou o mínimo propriamente dito.

Temos as seguintes fórmulas para X_v e Y_v:

$$\mathrm{X_v} = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$$

Observação: Quando a parábola possui duas raízes reais distintas, o X_v será a média aritmética das raízes. E quando possui duas raízes reais iguais, a raiz será exatamente o X_v.

$$\mathrm{Y_v} = -\frac{\Delta}{4\mathrm{a}}$$

Observação: Quando já se tem o valor do X_v, então $Y_v = f(X_v)$.

Exemplo: Considere a função $f(x) = -x^2 + 12x$, em que f fornece o lucro de uma empresa, em milhares, a partir das x unidades vendidas de seu produto.

(A) Qual o número de peças que devem ser vendidas para atingirmos o lucro máximo?
Aqui, o número de peças que devem ser vendidas para atingirmos o lucro máximo é dado pelo x_v:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-1)} = 6$$

Ou seja, ocorre quando vendemos 6 peças.

(B) Qual o lucro máximo obtido por essa empresa?

Já o lucro máximo é obtido por y_v:

$$y_v = f(x_v) = f(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Ou seja, é igual a $R\$36.000{,}00$ reais (36 milhares de reais).

Exercícios

1. (Enem 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura $(°C)$	**Classificação**
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

(A) muito baixa.

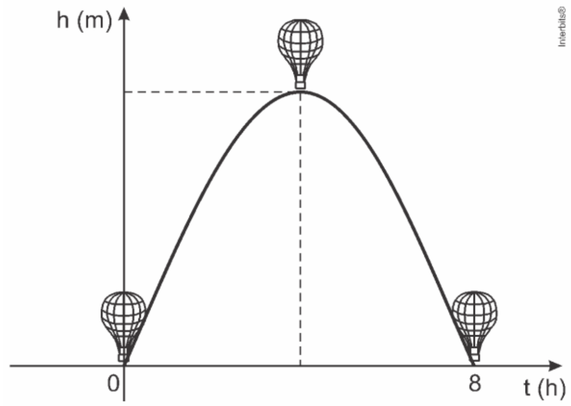
(B) baixa.

(C) média.

(D) alta.

(E) muito alta.

2. Um balão de ar quente sai do solo às $9\ h$ da manhã (origem do sistema cartesiano) e retorna ao solo 8 horas após sua saída, conforme demonstrado a seguir. A altura h, em metros, do balão, está em função do tempo t, em horas, através da fórmula $h(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 6t$.



(SILVA, Marcos Noé Pedro da. Exercícios sobre gráfico da função de 2º grau. Uol notícias. Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-grafico-funcao-2-o-grau.htm>. Acesso: 03 out. 2018 (adaptado).)

A altura máxima atingida pelo balão é de

(A) $21\ m$.

(B) $36\ m$.

(C) $8\ m$.

(D) $4\ m$.

(E) $12\ m$.

3. O programa de sócio torcedor de uma agremiação esportiva cobra mensalidade de R$ 50,00 dos sócios. Atualmente, o programa conta com 600 sócios e a agremiação estima que a cada R$ 5,00 de aumento na mensalidade irá perder 8 sócios. Considerando apenas aumentos mensais de R$ 5,00, o maior faturamento mensal que esse programa de sócio torcedor pode gerar para a agremiação é de

(A) R$ 72.240,00.

(B) R$ 78.250,00.

(C) R$ 80.420,00.

(D) R$ 82.280,00.

(E) R$ 86.420,00.

4. O número de turistas x que comparecem diariamente para um passeio de barco, relaciona-se com o preço p em reais cobrado por pessoa através da relação $p = 300 - 2x$.

Se o barco tiver 100 lugares, qual a receita máxima que pode ser obtida por dia?

(A) $R\$\ 10.000{,}00$.

(B) $R\$\ 11.500{,}00$.

(C) $R\$\ 10.750{,}00$.

(D) $R\$\ 11.000{,}00$.

(E) $R\$\ 11.250{,}00$.

5. Um fazendeiro dispõe de material para construir 60 metros de cerca em uma região retangular, com um lado adjacente a um rio.

Sabendo que ele não pretende colocar cerca no lado do retângulo adjacente ao rio, a área máxima da superfície que conseguirá cercar é:

(A) $430\ m^2$.

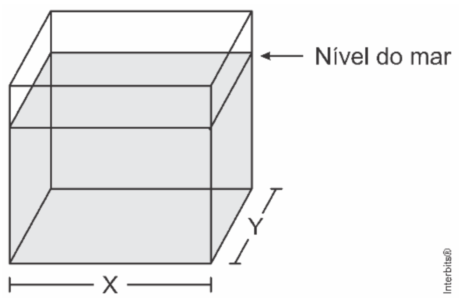
(B) $440\ m^2$.

(C) $460\ m^2$.

(D) $470\ m^2$.

(E) $450\ m^2$.

6. Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

(A) 1 e 49.

(B) 1 e 99.

(C) 10 e 10.

(D) 25 e 25.

(E) 50 e 50.

7. A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um *combo* a $R\$\ 10{,}00$, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de $R\$\ 1{,}00$ nesse preço, ela vende 100 *combos* a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse *combo*?

(A) $R\$\ 2.000{,}00$.

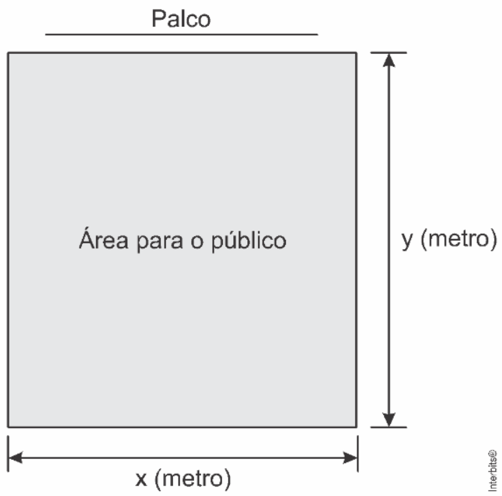
(B) $R\$\ 3.200{,}00$.

(C) $R\$\ 3.600{,}00$.

(D) $R\$\ 4.000{,}00$.

(E) $R\$\ 4.800{,}00$.

8. Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.



A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é $R\$\ \ 20,00$;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa $R\$\ \ 5,00$.

A empresa dispõe de $R\$\ \ 5.000,00$ para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público. A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

(A) $50,0\ m$ da tela tipo A e $800,0\ m$ da tela tipo B.

(B) $62,5\ m$ da tela tipo A e $250,0\ m$ da tela tipo B.

(C) $100,0\ m$ da tela tipo A e $600,0\ m$ da tela tipo B.

(D) $125,0\ m$ da tela tipo A e $500,0\ m$ da tela tipo B.

(E) $200,0\ m$ da tela tipo A e $200,0\ m$ da tela tipo B.

9. Uma empresa vendia, por mês, 200 unidades de certo produto ao preço de $R\$\ 40,00$ a unidade. A empresa passou a conceder desconto na venda desse produto e verificou-se que a cada real de desconto concedido por unidade do produto implicava na venda de 10 unidades a mais por mês.

Para obter o faturamento máximo em um mês, o valor do desconto, por unidade do produto, deve ser igual a

(A) $R\$\ 5,00$.

(B) $R\$\ 10,00$.

(C) $R\$\ 12,00$.

(D) $R\$\ 15,00$.

(E) $R\$\ 20,00$.

10. O apresentador de um programa de auditório propôs aos participantes de uma competição a seguinte tarefa: cada participante teria 10 minutos para recolher moedas douradas colocadas aleatoriamente em um terreno destinado à realização da competição. A pontuação dos competidores seria calculada ao final do tempo destinado a cada um dos participantes, no qual as moedas coletadas por eles seriam contadas e a pontuação de cada um seria calculada, subtraindo do número de moedas coletadas uma porcentagem de valor igual ao número de moedas coletadas. Dessa forma, um participante que coletasse 60 moedas teria sua pontuação calculada da seguinte forma: pontuação = 60 – 36 (60% de 60) = 24. O vencedor da prova seria o participante que alcançasse a maior pontuação.

Qual será o limite máximo de pontos que um competidor pode alcançar nessa prova?

(A) 0.

(B) 25.

(C) 50.

(D) 75.

(E) 100.

Gabaritos

1. **D**
Quando o h é o maior possível, o T é o maior possível também. Assim, basta acharmos o vértice desta parábola. Neste caso, nossa intenção é acharmos o T do vértice, ou seja, $Y_v = -\Delta/4a$, em que a = -1, b = 22 e c = -85.
Fazendo esta conta, você irá encontrar o valor do vértice como 36°.Este resultado se encaixa na classificação de Alta.

2. **E**
Calculando:
$$h(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 6t$$
$$h_{máx} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6^2 - 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 0}{4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{6^2}{-3} = \frac{36}{3} \Rightarrow h_{máx} = 12$$

3. **A**
Sendo x o número de aumentos de R$ 5,00, o faturamento mensal é dado por:
$$f(x) = (600 - 8x)(50 + 5x)$$
$$f(x) = 30000 + 3000x - 400x - 40x^2$$
$$f(x) = -40x^2 + 2600x + 30000$$
Quantidade de aumentos que maximiza o faturamento:
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2600}{2\cdot(-40)} = 32{,}5$$
Como o número de aumentos deve ser inteiro, o faturamento máximo deve ser de:
$$f_{máx} = f(32) = -40\cdot 32^2 + 2600\cdot 32 + 30000$$
$$f_{máx} = R\$\ 72.240{,}00$$
ou
$$f_{máx} = f(33) = -40\cdot 33^2 + 2600\cdot 33 + 30000$$
$$f_{máx} = R\$\ 72.240{,}00$$

4. **E**
A receita é dada por:
$$R = px$$
$$R = -2x^2 + 300x$$

Para que ela seja máxima, o número de lugares ocupados deve ser:
$$x = \frac{-300}{2\cdot(-2)} = 75$$

Dessa forma, a receita máxima seria de:
$$R_{máx} = -2\cdot 75^2 + 300\cdot 75$$
$$\therefore R_{máx} = R\$\ 11.250{,}00$$

5. **E**
Calculando:
$y + 2x = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$
$S_{retângulo} = x \cdot y = x \cdot (60 - 2x) = 60x - 2x^2$
$x_{máx} = \dfrac{-60}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x_{máx} = 15 \Rightarrow y_{máx} = 30$
$S_{retângulo} = 15 \cdot 30 = 450\ m^2$

6. **D**
Calculando:
$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x \cdot y = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ x \cdot y = S \end{cases} \Rightarrow x \cdot (50 - x) = S \Rightarrow x_{máx} = y_{máx} = 25$

7. **C**
Seja x o número de reduções de R\$ $1{,}00$ no preço do combo. Logo, a arrecadação diária, $A(x)$, é dada por
$A(x) = (10 - x)(200 + 100x)$
$= -100(x + 2)(x - 10).$

O número de reduções que fornece a arrecadação máxima é igual a $\frac{-2+10}{2} = 4$. Em consequência, a resposta é
$A(4) = -100(4 + 2)(4 - 10)$
$=$ R\$ $3.600{,}00.$

8. **D**
Queremos calcular os valores de $2x$ e de $2y$, de tal modo que a área $A = x \cdot y$ seja máxima e $40x + 10y = 5000$, isto é, $y = 500 - 4x$. Daí, como $A = -4x(x - 125)$ atinge um máximo para $x = \frac{0+125}{2} = 62{,}5\ m$, temos $y = 500 - 4 \cdot 62{,}5 = 250$ e, portanto, segue que $2x = 125\ m$ e $2y = 500\ m$.

9. **B**
Seja x o número de descontos de R\$ $1{,}00$. Logo, o faturamento mensal é dado por
$R(x) = (40 - x)(200 + 10x)$
$= -10(x - 40)(x + 20).$

O valor de x para o qual se tem o faturamento máximo é $\frac{40-20}{2} = 10$.
Portanto, a resposta é $10 \cdot$ R\$ $1{,}00 =$ R\$ $10{,}00$.

10. **B**
Considerando x o número de moedas douradas coletadas, a pontuação seria dada por:
$P(x) = x - \dfrac{x}{100} \cdot x \Rightarrow P(x) = -\dfrac{x^2}{100} + X$
Logo, o valor máximo de P(x) será dado por:
$P_{máximo} = -\dfrac{\Delta}{4 \cdot a} = -\dfrac{1}{4 \cdot \left(\frac{-1}{100}\right)} = 25.$

Portanto, o limite de pontos que um competidor poderá alcançar nesta prova é 25.